Έστω x, y, z θετικοί ακέραιοι, τ.ω $28x + 30y + 31z = 365$

Να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος $x + y + z$

// Με x, y, z θετικούς ακέραιους, έχω:

$$28(x+y+z) = 28x + 28y + 28z = 28x + 28y + 2y + 28z + 3z - 2y - 3z = 365 - 2y - 3z \leq 365 - 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = 360$$

, δηλαδή $x+y+z \leq \frac{360}{28} \simeq 12,8$ (1)

Ακόμη: $31(x+y+z) = 31x + 31y + 31z = 31x - 3x + 31y - y + 31z + 3x + y = 365 + 3x + y \geq 365 + 3\cdot 1 + 1 = 369$

, δηλαδή $x+y+z \geq \frac{369}{31} \simeq 11,9$ (2)

Από (1), (2) $\quad 11,9 \leq x+y+z \leq 12,8$, με $x+y+z \in \mathbb{Z}$

, οπότε $\boxed{x+y+z = 12}$

Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες λύσεις (x,y) της εξίσωσης $4x + 7y = 97$

// Είναι, $ΜΚΔ\{4,7\} = ΜΚΔ\{4,7-4\} = ΜΚΔ\{4,3\} = ΜΚΔ\{4-3,3\}$ $= ΜΚΔ\{1,3\} = 1$, με $1 \mid 97$, συνεπώς η εξίσωση έχει άπειρες ακέραιες λύσεις.

Είναι, $1 = 4-3 = 4-(7-4) = 4\cdot 2 + 7(-1)$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με 97 παίρνω, $97 = 4(2\cdot 97) + 7(-97)$, με το ζεύγος $(2\cdot 97, -97)$ να αποτελεί μια ακέραια λύση.

Έχω έτσι τη γενική της λύση (x,y) με:

$$\begin{cases} x = 2\cdot 97 + 7s \\ y = -97 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{Z}.$$ Αφού αναζητώ θετικές λύσεις,

$$\begin{cases} 2\cdot 97 + 7s > 0 \\ \text{και} \\ -97 - 4s > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s > -\frac{2\cdot 97}{7} \\ \text{και} \\ s < -\frac{97}{4} \end{cases},$$ δηλαδή για s ακέραιο

$$-\frac{2\cdot 97}{7} < s < -\frac{97}{4},$$ οπότε $s = -27, -26, -25$,

με τα οποία να δίνουν λύσεις $(5,11)$, $(12,7)$, $(19,3)$.

Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $6x+8y+10z=2$.

// Είναι, $6x+8y+10z=2 \iff 3x+4y+5z=1$

Είναι, $ΜΚΔ\{3,4\} = ΜΚΔ\{3,4-3\} = ΜΚΔ\{3,1\} = 1$.

Έτσι θέτω $3x+4y=w$ και έχω: $w+5z=1$

Είναι $ΜΚΔ\{1,5\}=1$, με $1|1$, άρα έχω άπειρες ακέραιες λύσεις.

Είναι $1 = 5\cdot 1 + 1(-4)$, οπότε $(w_0, z_0) = (-4, 1)$ είναι μια ακέραια λύση της $w+5z=1$. Έτσι έχω τη γενική της λύση (w,z), με

$$\begin{cases} w = -4+5t \\ z = 1-t \end{cases}, t\in\mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y = -4+5t \\ z = 1-t \end{cases}, t\in\mathbb{Z} \quad (1)$$

Είναι $ΜΚΔ\{3,4\} = 1 = 4-3$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με $-4+5t$, παίρνω: $-4+5t = 3(4-5t)+4(-4+5t)$, οπότε $(x_0,y_0) = (4-5t, -4+5t)$ είναι μια ακέραια λύση της $3x+4y=-4+5t$. Έτσι έχω τη γενική της λύση (x,y), με

$$\begin{cases} x = 4-5t+4s \\ y = -4+5t-3s \end{cases}, t,s\in\mathbb{Z} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχω ακέραιες λύσεις (x,y,z): $\begin{cases} x = 4-5t+4s \\ y = -4+5t-3s \\ z = 1-t \end{cases}, t,s\in\mathbb{Z}$.